Formalisation de la Syntaxe Transcendantale

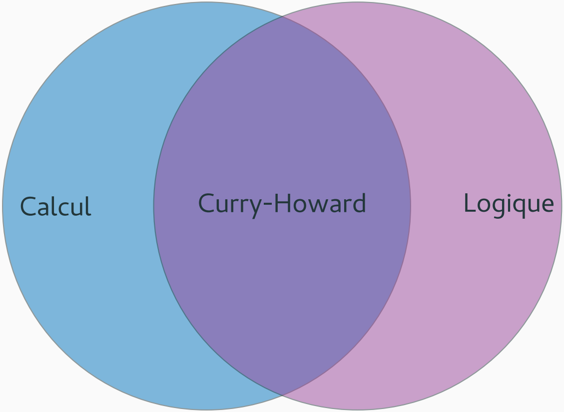
Supervision : Thomas SEILLER (LoVe/LIPN)

(Sambo) Boris ENG

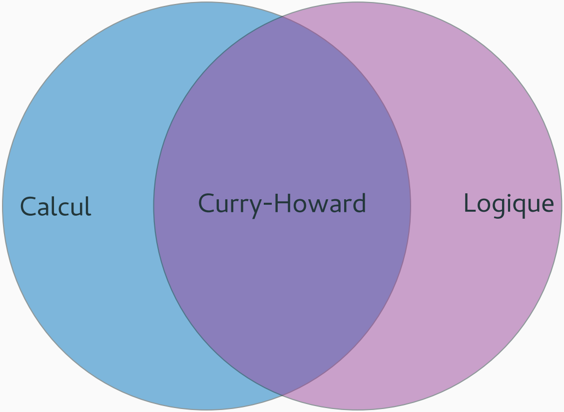
M2 MPRI Université Paris Diderot - Paris 7

Contexte

Correspondance de Curry-Howard

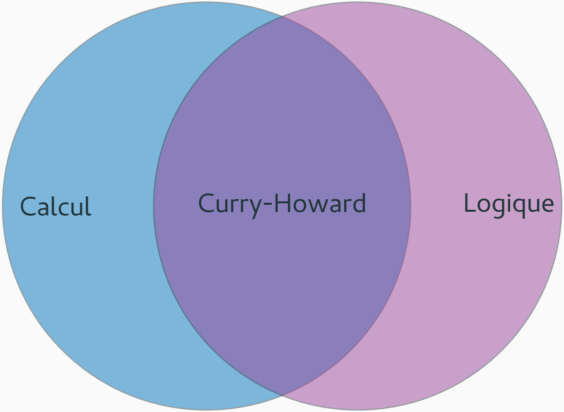


Correspondance de Curry-Howard



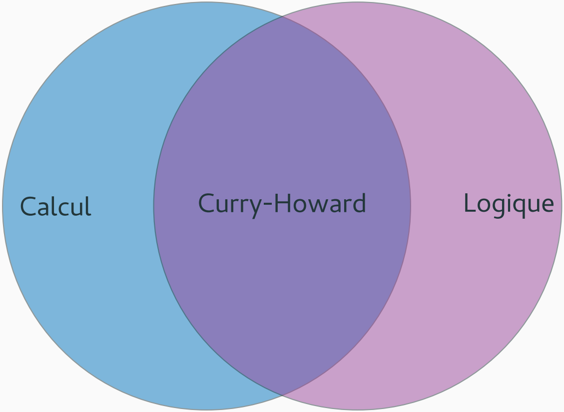
Structure : Programmes $\approx$ Preuves mathématiques

Correspondance de Curry-Howard



Structure : Programmes ≈ Preuves mathématiques
Dynamique : Exécution ≈ Élimination des coupures

Correspondance de Curry-Howard



Structure	: Programmes $\approx$ Preuves mathématiques
Dynamique	: Exécution $\approx$ Élimination des coupures
Application	: Programmer $\approx$ Prouver (Coq)

Motivations

Point de départ (principalement les travaux de Jean-Yves Girard) :

Motivations

Point de départ (principalement les travaux de Jean-Yves Girard) :

- Logique linéaire

Motivations

Point de départ (principalement les travaux de Jean-Yves Girard) :

- Logique linéaire
- Structures de preuves : preuves comme hypergraphes
  - Simule les preuves traditionnelles (classiques, intuitionnistes)
  - Simule le λ-calcul (typé et non-typé)

Motivations

Point de départ (principalement les travaux de Jean-Yves Girard) :

- Logique linéaire
- Structures de preuves : preuves comme hypergraphes
  - Simule les preuves traditionnelles (classiques, intuitionnistes)
  - Simule le λ-calcul (typé et non-typé)
- Syntaxe Transcendantale : mise à jour basée sur l'unification

Motivations

Point de départ (principalement les travaux de Jean-Yves Girard) :

- Logique linéaire
- Structures de preuves : preuves comme hypergraphes
  - Simule les preuves traditionnelles (classiques, intuitionnistes)
  - Simule le λ-calcul (typé et non-typé)
- Syntaxe Transcendantale : mise à jour basée sur l'unification

Objectif du stage :

Motivations

Point de départ (principalement les travaux de Jean-Yves Girard) :

- Logique linéaire
- Structures de preuves : preuves comme hypergraphes
  - Simule les preuves traditionnelles (classiques, intuitionnistes)
  - Simule le λ-calcul (typé et non-typé)
- Syntaxe Transcendantale : mise à jour basée sur l'unification

Objectif du stage :

- Formaliser « Transcendental Syntax I » (Jean-Yves Girard).

Motivations

Point de départ (principalement les travaux de Jean-Yves Girard) :

- Logique linéaire
- Structures de preuves : preuves comme hypergraphes
    - Simule les preuves traditionnelles (classiques, intuitionnistes)
    - Simule le λ-calcul (typé et non-typé)
- Syntaxe Transcendantale : mise à jour basée sur l'unification

Objectif du stage :

- Formaliser « Transcendental Syntax I » (Jean-Yves Girard).
  $\Longrightarrow$ appliqué au fragment MLL de la logique linéaire

Motivations

Point de départ (principalement les travaux de Jean-Yves Girard) :

- Logique linéaire
- Structures de preuves : preuves comme hypergraphes
  - Simule les preuves traditionnelles (classiques, intuitionnistes)
  - Simule le λ-calcul (typé et non-typé)
- Syntaxe Transcendantale : mise à jour basée sur l'unification

Objectif du stage :

- Formaliser « Transcendental Syntax I » (Jean-Yves Girard).
  $\Longrightarrow$ appliqué au fragment MLL de la logique linéaire
  $\Longrightarrow$ définitions, contraintes nécessaires, théorèmes et preuves

Motivations

Point de départ (principalement les travaux de Jean-Yves Girard) :

- Logique linéaire
- Structures de preuves : preuves comme hypergraphes
  - Simule les preuves traditionnelles (classiques, intuitionnistes)
  - Simule le λ-calcul (typé et non-typé)
- Syntaxe Transcendantale : mise à jour basée sur l'unification

Objectif du stage :

- Formaliser « Transcendental Syntax I » (Jean-Yves Girard).
  $\Longrightarrow$ appliqué au fragment MLL de la logique linéaire
  $\Longrightarrow$ définitions, contraintes nécessaires, théorèmes et preuves

Intérêts :

Motivations

Point de départ (principalement les travaux de Jean-Yves Girard) :

- Logique linéaire
- Structures de preuves : preuves comme hypergraphes
  - Simule les preuves traditionnelles (classiques, intuitionnistes)
  - Simule le λ-calcul (typé et non-typé)
- Syntaxe Transcendantale : mise à jour basée sur l'unification

Objectif du stage :

- Formaliser « Transcendental Syntax I » (Jean-Yves Girard).
  $\Longrightarrow$ appliqué au fragment MLL de la logique linéaire
  $\Longrightarrow$ définitions, contraintes nécessaires, théorèmes et preuves

Intérêts :

- Nouveau statut pour les entités logiques (premier ordre)

Motivations

Point de départ (principalement les travaux de Jean-Yves Girard) :

- Logique linéaire
- Structures de preuves : preuves comme hypergraphes
  - Simule les preuves traditionnelles (classiques, intuitionnistes)
  - Simule le λ-calcul (typé et non-typé)
- Syntaxe Transcendantale : mise à jour basée sur l'unification

Objectif du stage :

- Formaliser « Transcendental Syntax I » (Jean-Yves Girard).
  $\Longrightarrow$ appliqué au fragment MLL de la logique linéaire
  $\Longrightarrow$ définitions, contraintes nécessaires, théorèmes et preuves

Intérêts :

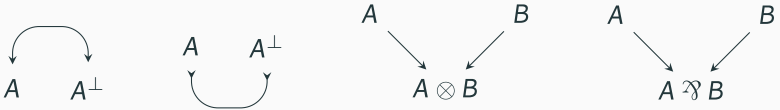
- Nouveau statut pour les entités logiques (premier ordre)
- Applications en complexité (définition fine d'exécution)

Structures de preuves de MLL

Structures de preuves de MLL

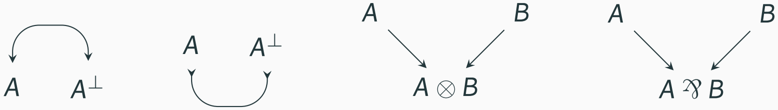
Logique linéaire multiplicative (MLL) : $a \mid A^{\perp} \mid A \otimes B \mid A \parr B$

Constructeurs possédant des hypothèses et conclusions :

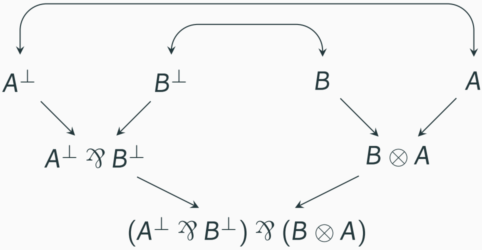


Logique linéaire multiplicative (MLL) : $a \mid A^\perp \mid A \otimes B \mid A \parr B$

Constructeurs possédant des hypothèses et conclusions :



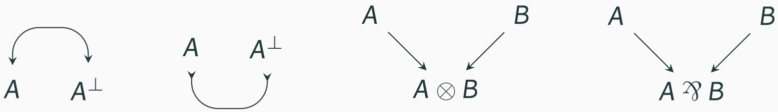
Cette preuve représente t-elle une "preuve valide" ?



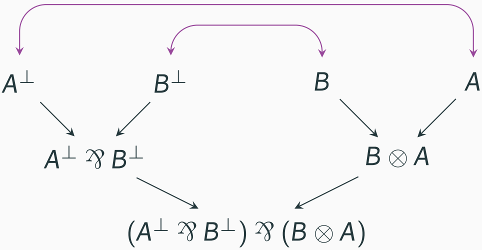
Structures de preuves de MLL

Logique linéaire multiplicative (MLL) : $a \mid A^\perp \mid A \otimes B \mid A \parr B$

Constructeurs possédant des hypothèses et conclusions :



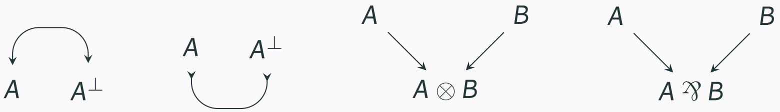
Critère de correction : axiomes confrontés à des tests



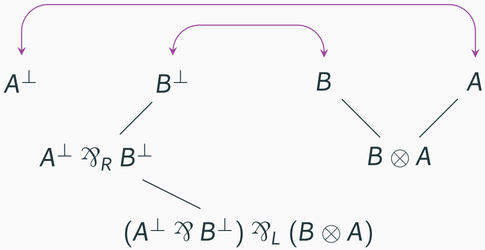
Structures de preuves de MLL

Logique linéaire multiplicative (MLL) : $a \mid A^\perp \mid A \otimes B \mid A \parr B$

Constructeurs possédant des hypothèses et conclusions :



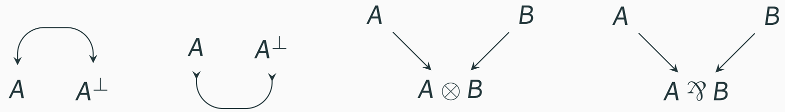
Critère de correction : axiomes confrontés à des tests



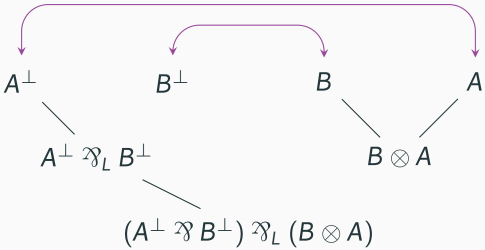
Structures de preuves de MLL

Logique linéaire multiplicative (MLL) : $a \mid A^\perp \mid A \otimes B \mid A \parr B$

Constructeurs possédant des hypothèses et conclusions :



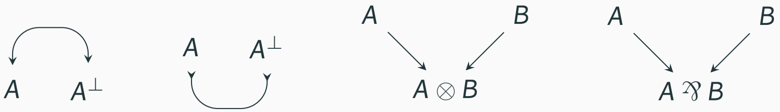
Critère de correction : axiomes confrontés à des tests



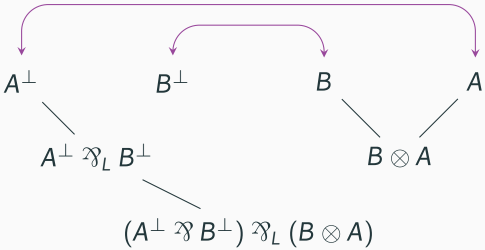
Structures de preuves de MLL

Logique linéaire multiplicative (MLL) : $a \mid A^\perp \mid A \otimes B \mid A \parr B$

Constructeurs possédant des hypothèses et conclusions :



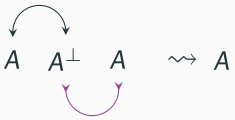
Critère de correction : axiomes confrontés à des tests

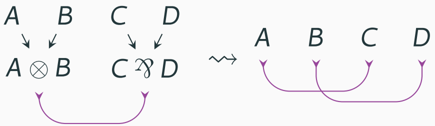


Séquentialisation : Si pour toute combinaison on a un arbre alors
$\Longrightarrow$ Preuve correcte certifiée ”Réseau de preuve”

Évaluation

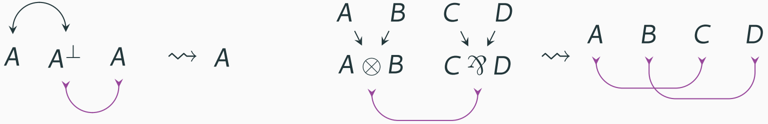
Procédure d'élimination des coupures $\approx$ évaluation de programme :



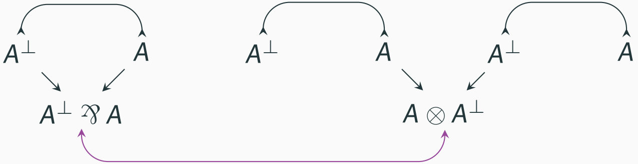


Évaluation

Procédure d'élimination des coupures ≈ évaluation de programme :

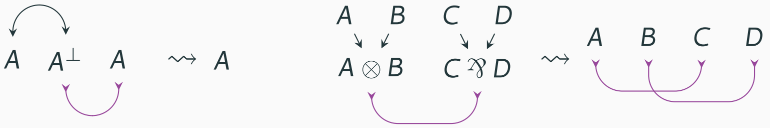


Exemple d'élimination des coupures sur un réseau de preuve :

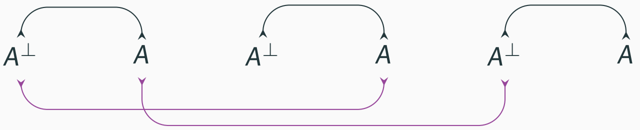


Évaluation

Procédure d'élimination des coupures ≈ évaluation de programme :

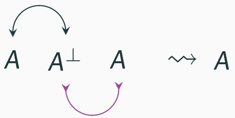


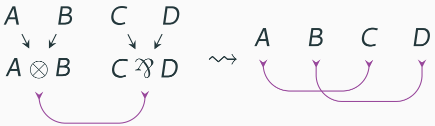
Exemple d'élimination des coupures sur un réseau de preuve :



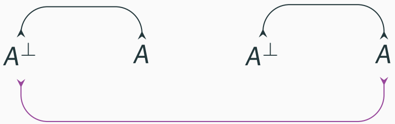
Évaluation

Procédure d'élimination des coupures ≈ évaluation de programme :



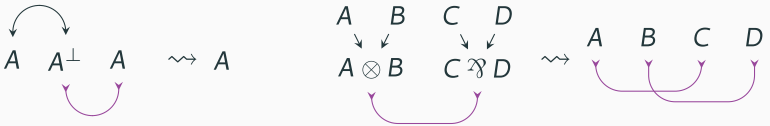


Exemple d'élimination des coupures sur un réseau de preuve :

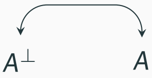


Évaluation

Procédure d'élimination des coupures $\approx$ évaluation de programme :

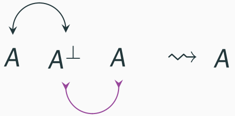


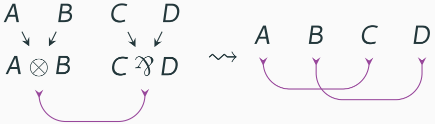
Exemple d'élimination des coupures sur un réseau de preuve :



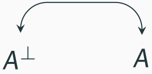
Évaluation

Procédure d'élimination des coupures ≈ évaluation de programme :





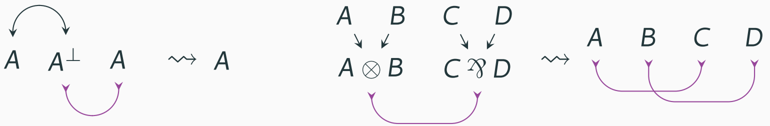
Exemple d'élimination des coupures sur un réseau de preuve :



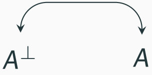
Peut-on évaluer sans réécriture d'hypergraphe ?

Évaluation

Procédure d'élimination des coupures $\approx$ évaluation de programme :



Exemple d'élimination des coupures sur un réseau de preuve :

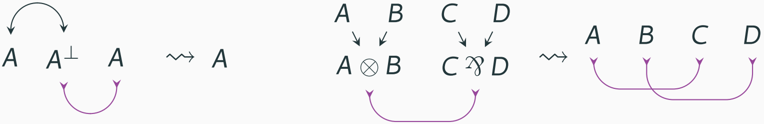


Peut-on évaluer sans réécriture d'hypergraphe ?

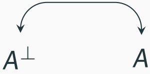
- Géométrie de l'interaction par lecture de la preuve

Évaluation

Procédure d'élimination des coupures ≈ évaluation de programme :



Exemple d'élimination des coupures sur un réseau de preuve :

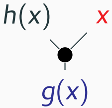


Peut-on évaluer sans réécriture d'hypergraphe ?

- Géométrie de l'interaction par lecture de la preuve
- Syntaxe Transcendantale : mise à jour asynchrone des preuves

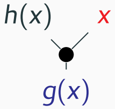
Étoiles et constellations

Formalisation des étoiles et constellations



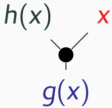
- Étoiles : multi-ensemble de termes du premier ordre colorés ou non $\sigma = [\![h(x), x, g(x)]\!]$ (rayons)

Formalisation des étoiles et constellations



- Étoiles : multi-ensemble de termes du premier ordre colorés ou non $\sigma = [\![h(x), x, g(x)]\!]$ (rayons)
- Constellations : multi-ensemble d'étoiles $\Sigma = \sigma_1 + ... + \sigma_k$

Formalisation des étoiles et constellations

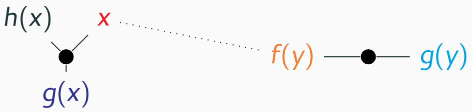


- Étoiles : multi-ensemble de termes du premier ordre colorés ou non $\sigma = [\![h(x), x, g(x)]\!]$ (rayons)
- Constellations : multi-ensemble d'étoiles $\Sigma = \sigma_1 + ... + \sigma_k$
- Analogie avec la programmation logique : clauses et programmes

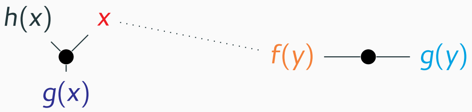
Formalisation des étoiles et constellations

- Étoiles : multi-ensemble de termes du premier ordre colorés ou non $\sigma = [\![h(x), {\color{red}x}, {\color{blue}g(x)}]\!]$ (rayons)
- Constellations : multi-ensemble d'étoiles $\Sigma = \sigma_1 + ... + \sigma_k$
- Analogie avec la programmation logique : clauses et programmes
- Diagramme, intuitivement :
  - "connecter des rayons de couleur duale entre eux"
  - "un diagramme peut réutiliser des étoiles"

Formalisation des étoiles et constellations



- Étoiles : multi-ensemble de termes du premier ordre colorés ou non $\sigma = [\![h(x), x, g(x)]\!]$ (rayons)
- Constellations : multi-ensemble d'étoiles $\Sigma = \sigma_1 + ... + \sigma_k$
- Analogie avec la programmation logique : clauses et programmes
- Diagramme, intuitivement :
  - ”connecter des rayons de couleur duale entre eux”
  - ”un diagramme peut réutiliser des étoiles”
- Réduction de liaison par ”fusion” :
  - Résolution d'équation entre termes (par unification)

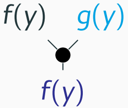


- Étoiles : multi-ensemble de termes du premier ordre colorés ou non $\sigma = [\![h(x), x, g(x)]\!]$ (rayons)
- Constellations : multi-ensemble d'étoiles $\Sigma = \sigma_1 + ... + \sigma_k$
- Analogie avec la programmation logique : clauses et programmes
- Diagramme, intuitivement :
  - ”connecter des rayons de couleur duale entre eux”
  - ”un diagramme peut réutiliser des étoiles”
- Réduction de liaison par ”fusion” :
  - Résolution d'équation entre termes (par unification)
  - Mise à jour des voisins par substitution

Formalisation des étoiles et constellations

- Étoiles : multi-ensemble de termes du premier ordre colorés ou non $\sigma = [\![h(x), x, g(x)]\!]$ (rayons)
- Constellations : multi-ensemble d'étoiles $\Sigma = \sigma_1 + ... + \sigma_k$
- Analogie avec la programmation logique : clauses et programmes
- Diagramme, intuitivement :
  - "connecter des rayons de couleur duale entre eux"
  - "un diagramme peut réutiliser des étoiles"
- Réduction de liaison par "fusion" :
  - Résolution d'équation entre termes (par unification)
  - Mise à jour des voisins par substitution
  - Rassemblement des étoiles par annihilation

Formalisation des étoiles et constellations



- Étoiles : multi-ensemble de termes du premier ordre colorés ou non $\sigma = [\![h(x), x, g(x)]\!]$ (rayons)
- Constellations : multi-ensemble d'étoiles $\Sigma = \sigma_1 + ... + \sigma_k$
- Analogie avec la programmation logique : clauses et programmes
- Diagramme, intuitivement :
  - ”connecter des rayons de couleur duale entre eux”
  - ”un diagramme peut réutiliser des étoiles”
- Réduction de liaison par ”fusion” :
  - Résolution d'équation entre termes (par unification)
  - Mise à jour des voisins par substitution
  - Rassemblement des étoiles par annihilation

Formalisation des étoiles et constellations

- Étoiles : multi-ensemble de termes du premier ordre colorés ou non $\sigma = [\![h(x), \textcolor{red}{x}, \textcolor{blue}{g(x)}]\!]$ (rayons)
- Constellations : multi-ensemble d'étoiles $\Sigma = \sigma_1 + ... + \sigma_k$
- Analogie avec la programmation logique : clauses et programmes
- Diagramme, intuitivement :
  - "connecter des rayons de couleur duale entre eux"
  - "un diagramme peut réutiliser des étoiles"
- Réduction de liaison par "fusion" :
  - Résolution d'équation entre termes (par unification)
  - Mise à jour des voisins par substitution
  - Rassemblement des étoiles par annihilation

Évaluation Ex(Σ) :

$$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow & D_1 & \Longrightarrow & \sigma_1 & & \\ \Sigma & & \cdots & & \cdots & = & \Sigma' \\ & \searrow & D_n & \Longrightarrow & \sigma_n & & \end{array}$$

- Constat : on doit former un arbre avec les étoiles

Formalisation des diagrammes

- Constat : on doit former un arbre avec les étoiles
  - Connexité : car sinon on ne produit pas forcément une étoile et le nombre de diagramme est illimité

$$\dots + \sigma + \sigma' + \sigma + \sigma' + \dots$$

Formalisation des diagrammes

- Constat : on doit former un arbre avec les étoiles
  - Connexité : car sinon on ne produit pas forcément une étoile et le nombre de diagramme est illimité

$$\ldots + \sigma + \sigma' + \sigma + \sigma' + \ldots$$

  - Acyclicité : inadéquation pour la logique

Formalisation des diagrammes

- Constat : on doit former un arbre avec les étoiles
  - Connexité : car sinon on ne produit pas forcément une étoile et le nombre de diagramme est illimité

$$... + \sigma + \sigma' + \sigma + \sigma' + ...$$

  - Acyclicité : inadéquation pour la logique

Définition des diagrammes :

Formalisation des diagrammes

- Constat : on doit former un arbre avec les étoiles
  - Connexité : car sinon on ne produit pas forcément une étoile et le nombre de diagramme est illimité

$$\ldots + \sigma + \sigma' + \sigma + \sigma' + \ldots$$

  - Acyclicité : inadéquation pour la logique

Définition des diagrammes :

- Graphe d'unifiabilité $\mathcal{U}(\Sigma)$: description du potentiel d'interaction

Formalisation des diagrammes

- Constat : on doit former un arbre avec les étoiles
  - Connexité : car sinon on ne produit pas forcément une étoile et le nombre de diagramme est illimité

$$... + \sigma + \sigma' + \sigma + \sigma' + ...$$

  - Acyclicité : inadéquation pour la logique

Définition des diagrammes :

- Graphe d'unifiabilité $\mathcal{U}(\Sigma)$: description du potentiel d'interaction

$$\sigma_1$$

$$\sigma_2 \qquad \sigma_3$$

- Diagramme : arbre D avec un morphisme de graphe $D \xmapsto{\varphi} \mathcal{U}(\Sigma)$
- On considère des diagrammes "saturés" (maximaux)

Formalisation des diagrammes

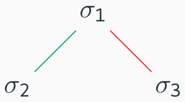
- Constat : on doit former un arbre avec les étoiles
  - Connexité : car sinon on ne produit pas forcément une étoile et le nombre de diagramme est illimité

$$... + \sigma + \sigma' + \sigma + \sigma' + ...$$

  - Acyclicité : inadéquation pour la logique

Définition des diagrammes :

- Graphe d'unifiabilité $\mathcal{U}(\Sigma)$: description du potentiel d'interaction



Formalisation des diagrammes

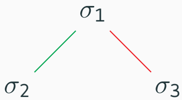
- Constat : on doit former un arbre avec les étoiles
  - Connexité : car sinon on ne produit pas forcément une étoile et le nombre de diagramme est illimité

$$\ldots + \sigma + \sigma' + \sigma + \sigma' + \ldots$$

  - Acyclicité : inadéquation pour la logique

Définition des diagrammes :

- Graphe d'unifiabilité $\mathcal{U}(\Sigma)$: description du potentiel d'interaction



- Diagramme : arbre D avec un morphisme de graphe $D \xrightarrow{\varphi} \mathcal{U}(\Sigma)$

Formalisation des diagrammes

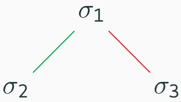
- Constat : on doit former un arbre avec les étoiles
  - Connexité : car sinon on ne produit pas forcément une étoile et le nombre de diagramme est illimité

$$\ldots + \sigma + \sigma' + \sigma + \sigma' + \ldots$$

  - Acyclicité : inadéquation pour la logique

Définition des diagrammes :

- Graphe d'unifiabilité $\mathcal{U}(\Sigma)$: description du potentiel d'interaction



- Diagramme : arbre D avec un morphisme de graphe $D \xmapsto{\varphi} \mathcal{U}(\Sigma)$
- On considère des diagrammes "saturés" (maximaux)

Résultats essentiels

Confluence pour la fusion ? $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n + \sigma_{n+1} \rightsquigarrow \sigma_f$

Résultats essentiels

Confluence pour la fusion ? $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n + \sigma_{n+1} \rightsquigarrow \sigma_f$

- Fusion complète $\approx$ résolution de problème d'unification

Résultats essentiels

Confluence pour la fusion ? $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n + \sigma_{n+1} \rightsquigarrow \sigma_f$

- Fusion complète $\approx$ résolution de problème d'unification
- On peut normaliser sur une couleur puis l'autre sans incidence

$$\begin{tikzcd}
 & D_1 \arrow[r, Rightarrow] & D'_1 \arrow[r, Rightarrow] & \sigma_1 & \\
\Sigma \arrow[ur] \arrow[dr] & \cdots & \cdots & \cdots & = \Sigma' \\
 & D_n \arrow[r, Rightarrow] & D'_m \arrow[r, Rightarrow] & \sigma_m &
\end{tikzcd}$$

Résultats essentiels

Confluence pour la fusion ? $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n + \sigma_{n+1} \rightsquigarrow \sigma_f$

- Fusion complète $\approx$ résolution de problème d'unification
- On peut normaliser sur une couleur puis l'autre sans incidence

$$\begin{tikzcd}
 & D_1 \arrow[r, Rightarrow, red] & D'_1 \arrow[r, Rightarrow, green] & \sigma_1 & \\
\Sigma \arrow[ur] \arrow[dr] & \cdots & \cdots & \cdots & = \Sigma' \\
 & D_n \arrow[r, Rightarrow, red] & D'_m \arrow[r, Rightarrow, green] & \sigma_m &
\end{tikzcd}$$

- Conséquence : associativité de l'élimination des coupures

Résultats essentiels

Confluence pour la fusion ? $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n + \sigma_{n+1} \rightsquigarrow \sigma_f$

- Fusion complète $\approx$ résolution de problème d'unification
- On peut normaliser sur une couleur puis l'autre sans incidence

$$
\begin{tikzcd}
 & D_1 \arrow[r, Rightarrow] & D'_1 \arrow[r, Rightarrow] & \sigma_1 & \\
\Sigma \arrow[ur] \arrow[dr] & \cdots & \cdots & \cdots & = \Sigma' \\
 & D_n \arrow[r, Rightarrow] & D'_m \arrow[r, Rightarrow] & \sigma_m &
\end{tikzcd}
$$

- Conséquence : associativité de l'élimination des coupures
  $\Longrightarrow$ et donc associativité de la composition du calcul

Résultats essentiels

Confluence pour la fusion ? $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n + \sigma_{n+1} \rightsquigarrow \sigma_f$

- Fusion complète $\approx$ résolution de problème d'unification
- On peut normaliser sur une couleur puis l'autre sans incidence

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \nearrow & D_1 & \Longrightarrow & D'_1 & \Longrightarrow & \sigma_1 \\
\Sigma & & \cdots & & \cdots & & \cdots \quad = \Sigma' \\
 & \searrow & D_n & \Longrightarrow & D'_m & \Longrightarrow & \sigma_m
\end{array}
$$

- Conséquence : associativité de l'élimination des coupures
  $\Longrightarrow$ et donc associativité de la composition du calcul

Autres résultats :

Résultats essentiels

Confluence pour la fusion ? $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n + \sigma_{n+1} \rightsquigarrow \sigma_f$

- Fusion complète $\approx$ résolution de problème d'unification
- On peut normaliser sur une couleur puis l'autre sans incidence

$$\begin{tikzcd} & D_1 \arrow[r, Rightarrow, red] & D'_1 \arrow[r, Rightarrow, green] & \sigma_1 & \\ \Sigma \arrow[ur] \arrow[dr] & \cdots & \cdots & \cdots & = \Sigma' \\ & D_n \arrow[r, Rightarrow, red] & D'_m \arrow[r, Rightarrow, green] & \sigma_m & \end{tikzcd}$$

- Conséquence : associativité de l'élimination des coupures
  $\Longrightarrow$ et donc associativité de la composition du calcul

Autres résultats :

- On peut construire un modèle de MLL

Résultats essentiels

Confluence pour la fusion ? $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n + \sigma_{n+1} \rightsquigarrow \sigma_f$

- Fusion complète $\approx$ résolution de problème d'unification
- On peut normaliser sur une couleur puis l'autre sans incidence

$$
\begin{tikzcd}
 & D_1 \arrow[r, red, Rightarrow] & D'_1 \arrow[r, green, Rightarrow] & \sigma_1 & \\
\Sigma \arrow[ur] \arrow[dr] & \cdots & \cdots & \cdots & = \Sigma' \\
 & D_n \arrow[r, red, Rightarrow] & D'_m \arrow[r, green, Rightarrow] & \sigma_m &
\end{tikzcd}
$$

- Conséquence : associativité de l'élimination des coupures
  $\Longrightarrow$ et donc associativité de la composition du calcul

Autres résultats :

- On peut construire un modèle de MLL
- On peut reconstruire le critère de correction

Reconstruction des preuves :

$$\begin{tikzcd}
A^\perp \arrow[rr, bend left, <->] \arrow[dr] & & A \arrow[dl] & & A^\perp \arrow[rr, bend left, <->] & & A \arrow[dr] & & A^\perp \arrow[rr, bend left, <->] \arrow[dl] & & A \\
& A^\perp \parr A \arrow[rrrrrr, bend right, <->] & & & & & & A \otimes A^\perp & & &
\end{tikzcd}$$

Reconstruction de la logique dans un espace commun

Reconstruction des preuves :

$$\begin{tikzcd}
A^{\perp} \arrow[rr, bend left, leftrightarrow, "{[\![p_{A^{\perp} \parr A}(l \cdot x),\ p_{A^{\perp} \parr A}(r \cdot x)]\!]}"] \arrow[dr] & & A \arrow[dl] & A^{\perp} \arrow[r, bend left, leftrightarrow, "{[\![p_{A^{\perp}}(x),\ p_{A \otimes A^{\perp}}(l \cdot x)]\!]}"] & A \arrow[dr] & & A^{\perp} \arrow[dl] \arrow[r, bend left, leftrightarrow, "{[\![p_{A \otimes A^{\perp}}(r \cdot x),\ p_{A}(x)]\!]}"] & A \\
& A^{\perp} \parr A \arrow[rrrr, bend right, leftrightarrow, "{[\![p_{A^{\perp} \parr A}(x),\ p_{A \otimes A^{\perp}}(x)]\!]}"'] & & & & A \otimes A^{\perp} & &
\end{tikzcd}$$

Reconstruction des preuves :

$$[\![p_{A^\perp \parr A}(l \cdot x),\ p_{A^\perp \parr A}(r \cdot x)]\!] \quad [\![p_{A^\perp}(x),\ p_{A \otimes A^\perp}(l \cdot x)]\!] \quad [\![p_{A \otimes A^\perp}(r \cdot x),\ p_A(x)]\!]$$

$$[\![p_{A^\perp \parr A}(x),\ p_{A \otimes A^\perp}(x)]\!]$$

Reconstruction de la logique dans un espace commun

Reconstruction des preuves :

$$[\![p_{A^\perp \parr A}(l \cdot x),\ p_{A^\perp \parr A}(r \cdot x)]\!] \quad [\![p_{A^\perp}(x),\ p_{A \otimes A^\perp}(l \cdot x)]\!] \quad [\![p_{A \otimes A^\perp}(r \cdot x),\ p_A(x)]\!]$$

$$[\![p_{A^\perp \parr A}(r \cdot x),\ p_{A \otimes A^\perp}(r \cdot x)]\!] \qquad [\![p_{A^\perp \parr A}(l \cdot x),\ p_{A \otimes A^\perp}(l \cdot x)]\!]$$

Reconstruction de la logique dans un espace commun

Reconstruction des preuves :

$$\llbracket p_{A^\perp \parr A}(l \cdot x),\ p_{A^\perp \parr A}(r \cdot x) \rrbracket \quad \llbracket p_{A^\perp}(x),\ p_{A \otimes A^\perp}(l \cdot x) \rrbracket \quad \llbracket p_{A \otimes A^\perp}(r \cdot x),\ p_A(x) \rrbracket$$

$$\llbracket p_{A^\perp \parr A}(r \cdot x),\ p_{A \otimes A^\perp}(r \cdot x) \rrbracket \qquad \llbracket p_{A^\perp \parr A}(l \cdot x),\ p_{A \otimes A^\perp}(l \cdot x) \rrbracket$$

Reconstruction des formules (test d'usage / types) :

$A = \{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n\}$: type comme certification sur des programmes

Reconstruction de la logique dans un espace commun

Reconstruction des preuves :

$$[\![p_{A^\perp \parr A}(l \cdot x),\ p_{A^\perp \parr A}(r \cdot x)]\!] \quad [\![p_{A^\perp}(x),\ p_{A \otimes A^\perp}(l \cdot x)]\!] \quad [\![p_{A \otimes A^\perp}(r \cdot x),\ p_A(x)]\!]$$

$$[\![p_{A^\perp \parr A}(r \cdot x),\ p_{A \otimes A^\perp}(r \cdot x)]\!] \qquad [\![p_{A^\perp \parr A}(l \cdot x),\ p_{A \otimes A^\perp}(l \cdot x)]\!]$$

Reconstruction des formules (test d'usage / types) :

$A = \{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n\}$: type comme certification sur des programmes

Reconstruction du critère de correction (test d'usine) :

Reconstruction des preuves :

$$[\![p_{A^\perp \parr A}(l \cdot x),\ p_{A^\perp \parr A}(r \cdot x)]\!] \quad [\![p_{A^\perp}(x),\ p_{A \otimes A^\perp}(l \cdot x)]\!] \quad [\![p_{A \otimes A^\perp}(r \cdot x),\ p_A(x)]\!]$$

$$[\![p_{A^\perp \parr A}(r \cdot x),\ p_{A \otimes A^\perp}(r \cdot x)]\!] \qquad [\![p_{A^\perp \parr A}(l \cdot x),\ p_{A \otimes A^\perp}(l \cdot x)]\!]$$

Reconstruction des formules (test d'usage / types) :

$A = \{\Sigma_1, ..., \Sigma_n\}$: type comme certification sur des programmes

Reconstruction du critère de correction (test d'usine) :

Axiomes d'une structure de preuve $\mathcal{V}$ $\quad\dagger\quad$ Test $\parr_{\{L,R\}}$

Reconstruction de la logique dans un espace commun

Reconstruction des preuves :

$$[\![p_{A^\perp \parr A}(l \cdot x),\ p_{A^\perp \parr A}(r \cdot x)]\!] \quad [\![p_{A^\perp}(x),\ p_{A \otimes A^\perp}(l \cdot x)]\!] \quad [\![p_{A \otimes A^\perp}(r \cdot x),\ p_A(x)]\!]$$

$$[\![p_{A^\perp \parr A}(r \cdot x),\ p_{A \otimes A^\perp}(r \cdot x)]\!] \qquad [\![p_{A^\perp \parr A}(l \cdot x),\ p_{A \otimes A^\perp}(l \cdot x)]\!]$$

Reconstruction des formules (test d'usage / types) :

$A = \{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n\}$: type comme certification sur des programmes

Reconstruction du critère de correction (test d'usine) :

Constellation $\Sigma_{\mathcal{V}}$ $\quad\dagger\quad$ Constellation $\Sigma_{\parr_{\{L,R\}}}$

Conclusion et perspectives

Un début de formalisation pour la Syntaxe Transcendantale

Conclusion et perspectives

Un début de formalisation pour la Syntaxe Transcendantale

- Modèle de calcul d'étoiles et de constellations

Conclusion et perspectives

Un début de formalisation pour la Syntaxe Transcendantale

- Modèle de calcul d'étoiles et de constellations
- Internalisation de MLL dans un espace homogène

Conclusion et perspectives

Un début de formalisation pour la Syntaxe Transcendantale

- Modèle de calcul d'étoiles et de constellations
- Internalisation de MLL dans un espace homogène

Difficultés principales

Conclusion et perspectives

Un début de formalisation pour la Syntaxe Transcendantale

- Modèle de calcul d'étoiles et de constellations
- Internalisation de MLL dans un espace homogène

Difficultés principales

- Faire des choix conceptuels et comprendre leurs conséquences

Conclusion et perspectives

Un début de formalisation pour la Syntaxe Transcendantale

- Modèle de calcul d'étoiles et de constellations
- Internalisation de MLL dans un espace homogène

Difficultés principales

- Faire des choix conceptuels et comprendre leurs conséquences
- Déterminer les contraintes nécessaires pour la logique

Conclusion et perspectives

Un début de formalisation pour la Syntaxe Transcendantale

- Modèle de calcul d'étoiles et de constellations
- Internalisation de MLL dans un espace homogène

Difficultés principales

- Faire des choix conceptuels et comprendre leurs conséquences
- Déterminer les contraintes nécessaires pour la logique
- Connecter ce modèle à la littérature

Conclusion et perspectives

Un début de formalisation pour la Syntaxe Transcendantale

- Modèle de calcul d'étoiles et de constellations
- Internalisation de MLL dans un espace homogène

Difficultés principales

- Faire des choix conceptuels et comprendre leurs conséquences
- Déterminer les contraintes nécessaires pour la logique
- Connecter ce modèle à la littérature

Projets (future thèse au LIPN avec Damiano Mazza et Thomas Seiller)

Conclusion et perspectives

Un début de formalisation pour la Syntaxe Transcendantale

- Modèle de calcul d'étoiles et de constellations
- Internalisation de MLL dans un espace homogène

Difficultés principales

- Faire des choix conceptuels et comprendre leurs conséquences
- Déterminer les contraintes nécessaires pour la logique
- Connecter ce modèle à la littérature

Projets (future thèse au LIPN avec Damiano Mazza et Thomas Seiller)

- Extension du modèle à des logiques plus riches

Conclusion et perspectives

Un début de formalisation pour la Syntaxe Transcendantale

- Modèle de calcul d'étoiles et de constellations
- Internalisation de MLL dans un espace homogène

Difficultés principales

- Faire des choix conceptuels et comprendre leurs conséquences
- Déterminer les contraintes nécessaires pour la logique
- Connecter ce modèle à la littérature

Projets (future thèse au LIPN avec Damiano Mazza et Thomas Seiller)

- Extension du modèle à des logiques plus riches
- Applications à la complexité (flots, graphages)

Critère de correction (exemple)

$$
\begin{tikzcd}
A^\perp \arrow[rrrr, bend left, <->] \arrow[dr] & & B^\perp \arrow[rrrr, bend left, <->] \arrow[dl] & & A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\
& A^\perp \parr B^\perp & & & & A \otimes B &
\end{tikzcd}
$$

Critère de correction (exemple)

$$\begin{tikzcd}
A^\perp \arrow[dr] \arrow[rrrr, bend left, leftrightarrow] & & B^\perp \arrow[dl] \arrow[rrrr, bend left, leftrightarrow] & & A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\
& A^\perp \parr B^\perp & & & & A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

$$[\![p_{A^\perp \parr B^\perp}(l \cdot x), p_{A \otimes B}(l \cdot x)]\!] + [\![p_{A^\perp \parr B^\perp}(r \cdot x), p_{A \otimes B}(r \cdot x)]\!]$$

Critère de correction (exemple)

$$\begin{tikzcd}
A^\perp \arrow[rrrr, bend left, <->] \arrow[dr] & & B^\perp \arrow[rrrr, bend left, <->] \arrow[dl] & & A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\
& A^\perp \parr B^\perp & & & & A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

$$[\![p_{A^\perp \parr B^\perp}(l \cdot x), p_{A\otimes B}(l \cdot x)]\!] + [\![p_{A^\perp \parr B^\perp}(r \cdot x), p_{A\otimes B}(r \cdot x)]\!]$$

$$[\![\frac{p_{A^\perp \parr B^\perp}(\mathtt{l} \cdot x)}{q_{A^\perp}(x)}]\!] + [\![\frac{p_{A^\perp \parr B^\perp}(\mathtt{r} \cdot x)}{q_{B^\perp}(x)}]\!] + [\![\frac{p_{A\otimes B}(x)}{q_A(\mathtt{l} \cdot x)}]\!] + [\![\frac{p_{A\otimes B}(x)}{q_B(\mathtt{r} \cdot x)}]\!]$$

$$
\begin{tikzcd}
A^\perp \arrow[rrrr, bend left, <->] \arrow[dr] & & B^\perp \arrow[rrrr, bend left, <->] \arrow[dl] & & A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\
& A^\perp \parr B^\perp & & & & A \otimes B &
\end{tikzcd}
$$

$$[\![p_{A^\perp \parr B^\perp}(l \cdot x), p_{A \otimes B}(l \cdot x)]\!] + [\![p_{A^\perp \parr B^\perp}(r \cdot x), p_{A \otimes B}(r \cdot x)]\!]$$

$$[\![\frac{p_{A^\perp \parr B^\perp}(\mathtt{l} \cdot x)}{q_{A^\perp}(x)}]\!] + [\![\frac{p_{A^\perp \parr B^\perp}(\mathtt{r} \cdot x)}{q_{B^\perp}(x)}]\!] + [\![\frac{p_{A \otimes B}(x)}{q_A(\mathtt{l} \cdot x)}]\!] + [\![\frac{p_{A \otimes B}(x)}{q_B(\mathtt{r} \cdot x)}]\!]$$

$$[\![\frac{q_{A^\perp}(x)}{q_{A^\perp \parr B^\perp}(x)}]\!] + [\![\frac{q_{B^\perp}(x)}{}]\!] \qquad + \qquad [\![\frac{q_A(x), q_B(x)}{\beta . q_{A \otimes B}(x)}]\!]$$

$$
\begin{tikzcd}
A^{\perp} \arrow[rrr, leftrightarrow, bend left] \arrow[dr] & & B^{\perp} \arrow[rrr, leftrightarrow, bend left] \arrow[dl] & A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\
& A^{\perp} \parr B^{\perp} & & & A \otimes B &
\end{tikzcd}
$$

$$\llbracket p_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(l \cdot x), p_{A \otimes B}(l \cdot x) \rrbracket + \llbracket p_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(r \cdot x), p_{A \otimes B}(r \cdot x) \rrbracket$$

$$\llbracket \frac{p_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(\mathtt{l} \cdot x)}{q_{A^{\perp}}(x)} \rrbracket + \llbracket \frac{p_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(\mathtt{r} \cdot x)}{q_{B^{\perp}}(x)} \rrbracket + \llbracket \frac{p_{A \otimes B}(x)}{q_A(\mathtt{l} \cdot x)} \rrbracket + \llbracket \frac{p_{A \otimes B}(x)}{q_B(\mathtt{r} \cdot x)} \rrbracket$$

$$\llbracket \frac{q_{A^{\perp}}(x)}{q_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(x)} \rrbracket + \llbracket \frac{q_{B^{\perp}}(x)}{} \rrbracket \qquad + \qquad \llbracket \frac{q_A(x), q_B(x)}{\beta . q_{A \otimes B}(x)} \rrbracket$$

$$\llbracket \frac{q_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(x)}{p_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(x)} \rrbracket \qquad + \qquad \llbracket \frac{q_{A \otimes B}(x)}{p_{A \otimes B}(x)} \rrbracket$$

Critère de correction (exemple)

$$
\begin{tikzcd}
A^{\perp} \arrow[dr] \arrow[rrrr, leftrightarrow, bend left] & & B^{\perp} \arrow[dl] \arrow[rrrr, leftrightarrow, bend left] & & A \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\
& A^{\perp} \parr B^{\perp} & & & & A \otimes B &
\end{tikzcd}
$$

$$\llbracket p_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(l \cdot x), p_{A \otimes B}(l \cdot x) \rrbracket + \llbracket p_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(r \cdot x), p_{A \otimes B}(r \cdot x) \rrbracket$$

$$\llbracket \frac{p_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(\mathtt{l} \cdot x)}{q_{A^{\perp}}(x)} \rrbracket + \llbracket \frac{p_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(\mathtt{r} \cdot x)}{q_{B^{\perp}}(x)} \rrbracket + \llbracket \frac{p_{A \otimes B}(x)}{q_{A}(\mathtt{l} \cdot x)} \rrbracket + \llbracket \frac{p_{A \otimes B}(x)}{q_{B}(\mathtt{r} \cdot x)} \rrbracket$$

$$\llbracket \frac{q_{A^{\perp}}(x)}{q_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(x)} \rrbracket + \llbracket \frac{q_{B^{\perp}}(x)}{} \rrbracket \qquad + \qquad \llbracket \frac{q_{A}(x), q_{B}(x)}{\beta . q_{A \otimes B}(x)} \rrbracket$$

$$\llbracket \frac{q_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(x)}{p_{A^{\perp} \parr B^{\perp}}(x)} \rrbracket \qquad + \qquad \llbracket \frac{q_{A \otimes B}(x)}{p_{A \otimes B}(x)} \rrbracket$$